

EL RECONOCIMIENTO DE ARGUMENTACIONES POR REDUCCIÓN AL ABSURDO EN ESCENARIOS ACADÉMICOS Y NO ACADÉMICOS

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”. Buenos Aires (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada. CICATA–IPN.
(México)
crcrespo@gmail.com

Campo de investigación: pensamiento lógico. Nivel: superior

Palabras clave: socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural, reducción al absurdo

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación orientada a analizar el carácter de construcción sociocultural de las demostraciones matemáticas. La investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica y se centra en las argumentaciones por reducción al absurdo, ya que se trata de un tipo de argumentación que no ha sido aceptada por la sociedad matemática de manera unánime. Esta etapa de la investigación se centra en la detección e identificación de este tipo de argumentaciones en distintos escenarios: tanto académicos (matemáticos y escolares), como no académicos, con la finalidad de mostrar la influencia que tienen los escenarios académicos en la presencia de estas argumentaciones.

Antecedentes de la investigación y marco teórico

En ese trabajo forma parte de una investigación que se propone comprender las características, funciones, fundamentos y evolución de las argumentaciones matemáticas, para analizar su naturaleza de construcción sociocultural. La hipótesis formulada se refiere a que las argumentaciones por reducción al absurdo, por estar fuertemente basadas en el principio del tercero excluido y en el principio de no contradicción, son propias del pensamiento lógico de culturas con influencia de la lógica clásica, no hallándose presentes en los razonamientos de culturas que no tuvieron esta influencia, ni de escenarios en los que no es habitual la influencia de la misma. De esta manera, podemos afirmar que no son innatas, y por lo tanto no son inherentes de la forma de razonar del ser humano, sino que dependen de la formación que ha recibido el individuo y del escenario en el que se desenvuelve. En la primera etapa, se centró este carácter cultural en el aspecto profesional (Crespo Crespo, 2005a, Crespo Crespo y Farfán, 2005, 2006), por lo que nuestra atención se fijó en estudiantes de distintas carreras y formaciones tratando de determinar a través de cuestionarios y entrevistas las distintas concepciones de alumnos y los mecanismos de su funcionamiento. En esta investigación que, como ya aclaramos restringió lo cultural a lo profesional, fue posible, desde este ángulo corroborar la hipótesis planteada en cuanto a que las argumentaciones por reducción al absurdo son construcciones socioculturales. Esto permitió identificar algunas concepciones de las demostraciones y argumentaciones matemáticas en las que tiene gran influencia la formación profesional.

Esta investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica, la cual ofrece una visión incluyente las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento. De esta manera, es que el contexto social, cultural e históricamente determinado actúa como parte indiscutible de este proceso de nacimiento, desarrollo y evolución de la ciencia. Cada objeto matemático es construido como resultado de las posiciones epistemológicas y filosóficas sustentadas. Esta etapa de la investigación se centra en la detección e identificación de este tipo de argumentaciones en distintos escenarios: tanto

académicos (matemáticos y escolares), como no académicos, con la finalidad de mostrar la influencia que tienen los escenarios académicos en la presencia de estas argumentaciones.

La investigación realizada

En este trabajo se presentan los resultados de una experimentación llevada a cabo a partir de encuestas y entrevistas a 50 estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, en la que se les pidió la búsqueda y detección de situaciones en escenarios no académicos en las que se utilice este tipo de argumentación indirecta.

Las preguntas presentadas a los alumnos que participaron de esta investigación fueron:

- a. Describa y fundamente las características de las argumentaciones por reducción al absurdo en matemática. Ejemplifique su utilización.
- b. Dé ejemplos de aplicaciones de este tipo de argumentaciones fuera de escenarios académicos (escolares y científicos). Explíquelos.
(Si considera que este tipo de argumentaciones no es aplicado fuera de escenarios académicos, explique y justifique su respuesta).

El objetivo de la primera pregunta fue que los estudiantes enmarcaran las preguntas, describiendo las características de las argumentaciones por reducción al absurdo desde el punto de vista lógico y presenten ejemplos de su aplicación dentro de la matemática. Se intentó determinar, a su vez dentro de la matemática, si existen contextos y ramas de la matemática en las que reconocen y aplican este tipo de demostraciones con mayor frecuencia.

La segunda pregunta apuntó directamente a la búsqueda y descripción de estas argumentaciones fuera de escenarios académicos.

Las argumentaciones por reducción al absurdo dentro de la matemática

De las respuestas dadas por los alumnos, surge que los alumnos entrevistados en su totalidad fueron capaces de describir las características y fundamentos lógicos de las argumentaciones por reducción al absurdo. No tuvieron dificultades en presentar como fundamentos de las mismas los principios aristotélicos del tercero excluido y no contradicción.

En relación con los ejemplos de este tipo de argumentación en matemática, es notable que la mayor proporción corresponde a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Esta demostración, es atribuida a los pitagóricos, descrita por Aristóteles que describe este procedimiento como que procedía por “*reductio ad absurdum*”. Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los Elementos de Euclides, como Proposición 117 del Libro X.

Se encuentran también entre las respuestas dadas otras propiedades aritméticas como: “*El cuadrado de un número par es par*”, “*El producto de dos impares es impar*”, “*La suma de un entero par y un impar es un número entero impar*”, entre otras.

Aparecen algunas respuestas presentando propiedades algebraicas mediante demostraciones por el absurdo: “*Un conjunto de vectores es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal de ellos que da por resultado el vector nulo es la que tiene todos los escalares igual a cero*”, “*En un espacio vectorial todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente*”. La primera de ellas que involucra la unicidad.

También se refieren a la unicidad las demostraciones presentadas que provienen del análisis matemático: “*El límite de una función es único*”. En las demostraciones de unicidad, es usual la aplicación de argumentaciones por reducción al absurdo, ya que la manera de demostrar que un elemento que verifica ciertas propiedades es único, consiste en suponer que no lo es, por medio de la existencia de otro elemento que tenga sus mismas propiedades y que sea distinto del anterior, para finalmente concluir que la existencia de éste es imposible ya que conduce a alguna contradicción.

En relación a demostraciones provenientes de la geometría, la única que aparece en los ejemplos presentados fue: “*Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí*”. Al preguntar acerca de los alumnos acerca de la causa de que la mayor cantidad de las demostraciones por reducción al absurdo presentadas proviene de las áreas del álgebra y de la aritmética (58% de las respuestas obtenidas), en relación a las provenientes de la geometría, algunos de ellos afirmaron que era más clara su aplicación a la aritmética que a la geometría, ya que en esta última rama de la matemática se encuentran en estrecha relación las demostraciones con las figuras de análisis, en las que se presentan algunas dificultades (Crespo Crespo, 2005a, 2005b, Crespo Crespo y Farfán, 2006).

También en algunas de las respuestas aparecen aplicaciones de argumentaciones por reducción al absurdo a propiedades que involucran el tratamiento del infinito. Por ejemplo: “*La unión de un conjunto numerable y un conjunto no numerable es un conjunto numerable*”, “*El intervalo $(0, 1)$ no es numerable*”. El infinito es uno de los conceptos en la demostración de cuyas propiedades resulta usual encontrar argumentaciones por reducción al absurdo.

Otra temática en la que aparecieron algunos ejemplos fue en la demostración de que ciertas proposiciones lógicas son paradójicas. En este tipo de argumentaciones, se parte de la suposición de cada valor de verdad para la misma y se demuestra que la proposición en análisis no puede ser ni verdadera ni falsa, pues ambas suposiciones conducen a un absurdo.

Algunos de los alumnos encuestados presentaron ejemplos de razonamientos de la lógica proposicional en los cuales para su demostración se aplican argumentaciones por reducción al absurdo. Estas formas de razonamiento fueron presentadas a través de razonamientos particulares que crearon mediante la interpretación de las proposiciones simples correspondientes.

A continuación se presentan los resultados de la experimentación realizada resumida a través de un cuadro en el que se pueden visualizar las cantidades de cada uno de los tipos de ejemplos que se describen:

Ejemplo presentado	Respuestas	Porcentaje		Respuestas	Porcentaje
Irracionalidad de $\sqrt{2}$	15	30 %	Aritmética y álgebra	29	58%
Otras propiedades aritméticas	12	24 %			
Propiedades de espacios vectoriales	2	4 %			
Propiedades que involucran el infinito	6	12 %	Conjuntos infinitos	6	12 %
Propiedades geométricas	6	12 %	Geometría	6	12 %
Propiedades de análisis matemático	3	6 %	Análisis	3	6 %
Razonamientos con paradojas	2	4 %	Lógica	6	12 %
Razonamientos en lógica proposicional	4	8 %			

Las argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos

En la parte de la experimentación que corresponde a la identificación de argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos, algunos de los encuestados también recurrieron a la presentación de razonamientos lógicos aplicados a situaciones ad-hoc por medio de la asignación de interpretaciones a las proposiciones simples en juego. La mayoría de estos ejemplos son presentados de manera informal, pero se ve claramente en ellos la influencia de los estudios de lógica realizados por los alumnos.

Algunos encontraron ejemplos concretos reales de este tipo de razonamientos, pero al presentarlos se encuentran expresiones como: *“A pesar de este ejemplo, creo que las argumentaciones por el método de reducción al absurdo son más complejas que las directas y su utilización se restringe a aquellos casos en que todo otro método falla. Otro de los puntos que me plantea un problema es que en ámbitos académicos se utiliza para probar generalidades, mientras que en la vida cotidiana se utiliza para cuestiones particulares. Puede ser que esté relacionado con la naturaleza del pensamiento académico y la del pensamiento cotidiano”*. Esta reflexión muestra claramente una diferenciación entre los resultados de la ciencia y los que no pertenecen a ese ámbito.

Una temática en la que aparecieron varios de los ejemplos presentados es en la resolución de enigmas y misterios, tanto a través del planteo de juegos de ingenio, como de la actuación de detectives. En el caso de los detectives, algunos de los alumnos presentaron casos extraídos de libros de ciencia ficción y otros recurrieron a entrevistar detectives y abogados para preguntarles al respecto. De las respuestas que obtuvieron de ellos, surge que en este ámbito se aplican argumentaciones indirectas para resolver situaciones que plantean un enigma.

Se presentaron algunas argumentaciones que utilizan la reducción al absurdo provenientes de discursos de políticos y noticias presentadas en diarios. Sin embargo, los alumnos que las mencionan, acuerdan en afirmar la debilidad y poca consistencia de estas argumentaciones.

Otra temática a la que se refieren varios de los ejemplos presentados se relaciona con creencias de tipo religioso, en las que se demuestra por medio de reducciones al absurdo la existencia de Dios y la veracidad de la teoría de las reencarnaciones. Un alumno presenta una argumentación que atribuye a Hume para demostrar la no existencia de un Dios Creador.

Algunos de los ejemplos presentados no se tratan en realidad de formas de razonamiento por reducción al absurdo, sino que aparecen en ellos formas de razonamiento no monotónico aplicados a temáticas como sentimientos o relaciones humanas.

Otra particularidad que aparece con frecuencia es la asociación incorrecta de esta forma de razonamiento con la aparición de situaciones de la vida real que contradicen lo que sería un pensamiento racional. Por ejemplo la presencia de propagandas de cigarrillos en las que se traduce felicidad y salud, las reacciones de alguien que se enamora pero huye del ser amado o el planteo de problemas sin solución como encontrar 370 personas que cumplan años en distintos días del año.

En el siguiente cuadro es posible visualizar de manera resumida los resultados de esta etapa de la experimentación:

Ejemplo presentado	Respuestas	Porcentaje		Respuestas	Porcentaje
Situaciones ad-hoc	8	16 %	Situaciones ad-hoc	8	16 %
Enigmas, detectives, ingenio	6	12 %	Enigmas	6	12 %
Política	4	8 %	Reconocimiento de debilidad	6	12 %
Noticias en diarios	2	4 %			
Creencias religiosas y metafísicas	4	8 %	Creencias	4	8 %
Razonamientos no monotónicos	10	20 %	No reconocimiento	26	52 %
Situaciones absurdas	7	14 %			
No existencia	9	18 %			

Como se observa en el cuadro anterior, fue bastante numerosa la proporción de quienes no identificaron la presencia de las argumentaciones por reducción al absurdo en escenarios no académicos. Algunos de ellos lo declararon explícitamente. Encontramos justificaciones como la siguiente: “Si bien las relaciones humanas tienen contradicciones y reacciones absurdas, considero que no se utiliza el método de reducción al absurdo rigurosamente como en matemática. Es decir, podemos llegar a una conclusión luego de encontrar algo absurdo, pero de manera más intuitiva, sin pensar matemáticamente”.

Reflexiones finales acerca de los resultados obtenidos

A partir de las respuestas obtenidas, es posible, por una parte, identificar que existen algunas ramas de la matemática en las que se hace un mayor uso de las argumentaciones por reducción al absurdo. Esto conduce por una parte a orientar la investigación a la identificación de cuáles son los conceptos y propiedades para cuya demostración se hace indispensable este tipo de demostración.

Por otra parte, en relación a los escenarios no académicos, se puede inferir que en muchos casos no son detectadas estas argumentaciones como una manera de razonar natural y que a veces son construidas por los entrevistados situaciones particulares para ejemplificarlas, aunque reconocen que no se trata de una manera usual de razonar en lo cotidiano, pudiendo reconocérselas como construcciones socioculturales. Otra idea que no aparece claramente manifestada en las respuestas obtenidas es la diferenciación entre absurdo e imposible en matemática y en situaciones cotidianas. Surgen además en los ejemplos presentados, otras formas de razonamiento no admitidos por la lógica clásica, como ser pensamientos no monotónicos.

Referencias bibliográficas

- Crespo Crespo, C. (2005a). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. Tesis de Maestría sin publicar. CICATA-IPN, México.
- Crespo Crespo, C. (2005b). *Las figuras de análisis en las demostraciones matemáticas por reducción al absurdo*. Presentado en III Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática CVEM 2005. Guadalajara (México).
- Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2005). *Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural*. Relime Vol. 8 (3), pp.287-317.
- Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2006). Las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. En Martínez Sierra, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 19*. Clame, México, pp.766-781.
- Eggers Lan, C. (1995). *El nacimiento de la matemática griega*. Buenos Aires: EUDEBA.
- Ifrah, G. (1997). *Historia de las cifras*. Madrid: Espasa.
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Gedisa: Barcelona.
- Toranzos, F. I. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina.